

SOLUZIONE PROTOTIPO

1) Svolgiamo l'esercizio in ambo i metodi che conosciamo.

In primo luogo occorre vedere se esiste l'inversa della matrice assegnata, ovvero se risulta $\det A \neq 0$. Si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - (1 + 8 + 0) = 2 - 9 = -7 \neq 0 \Rightarrow \det A = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}, \text{ inversa di } A$$

Primo metodo

Calcoliamo l'inversa di A sfruttando la formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

ove A^* è la matrice dei complementi algebrici.

Risulta allora:

$$\begin{aligned} c_{11} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4; & c_{12} &= - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; & c_{13} &= + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \\ c_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) = 2; & c_{22} &= + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; & c_{23} &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \\ c_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; & c_{32} &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; & c_{33} &= + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo

Calcoliamo l'inversa di A sfruttando il metodo della matrice identità.

Affianchiamo, a tale scopo, alla matrice data, di ordine 3×3 , la matrice identità dello stesso ordine:

$$[A | I_3] = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_A \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \right)$$

Effettuiamo ora le operazioni elementari sulle righe, o sulle colonne, di $[A | I_3]$ in modo tale da ottenere, alla fine, una matrice della forma $[I_3 | B]$, dove la matrice B sarà proprio l'inversa A^{-1} di A :

$$\begin{aligned} [A | I_3] &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - R_1} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 7R_3 + 4R_2} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow 7R_1 + R_3} \left(\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \right) \\ &\xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow \frac{1}{14}R_1 \\ R_2 \rightarrow -\frac{1}{7}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{7}R_3 \end{matrix}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \right) \end{aligned}$$

Dunque risulta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Si può ora osservare che la matrice inversa ottenuta con il secondo metodo è esattamente la stessa di quella ottenuta precedentemente con il primo metodo.

2) Primo metodo

Sfruttiamo la definizione di lineare dipendenza o indipendenza di vettori.

Scriviamo una combinazione lineare dei tre vettori e la eguagliamo al vettore nullo, precisamente:

$$(*) \quad k_1 \underline{v_1} + k_2 \underline{v_2} + k_3 \underline{v_3} = \underline{0}$$

dove i k_i ($i = 1, 2, 3$) sono degli scalari ovvero dei numeri reali.

Poniamo ora nella (*), al posto dei vettori, le terne assegnate:

$$k_1 (1, 1, 1) + k_2 (0, 1, 0) + k_3 (-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Moltiplichiamo ciascuna componente del vettore per il corrispondente scalare:

$$(k_1, k_1, k_1) + (0, k_2, 0) + (-k_3, 0, k_3) = (0, 0, 0)$$

Sommiamo ora componente per componente:

$$(k_1 + 0 - k_3, k_1 + k_2 + 0, k_1 + 0 + k_3) = (0, 0, 0)$$

cioè:

$$(k_1 - k_3, k_1 + k_2, k_1 + k_3) = (0, 0, 0)$$

Affinché l'equazione sopra scritta sia soddisfatta, i due membri devono essere uguali, ovvero i due vettori (quello che figura al primo membro e quello che figura al secondo membro) devono avere uguali le componenti che si trovano nella medesima posizione, precisamente deve risultare:

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + k_3 = 0 \end{cases}$$

Resta quindi da risolvere il sistema sopra riportato, ovvero determinare i valori delle incognite k_i ($i = 1, 2, 3$), osservando che se sono tutti nulli allora i vettori assegnati sono linearmente indipendenti, mentre se ne esiste uno diverso da zero allora siamo nel caso della lineare dipendenza dei vettori.

Occorre sottolineare, in primo luogo, che si tratta di un sistema quadrato di tre equazioni in tre incognite.

Dalla prima equazione otteniamo:

$$k_1 = k_3$$

Sostituiamo tale valore, ad esempio, nella seconda equazione:

$$k_3 + k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -k_3$$

Sostituiamo i valori fino ad ora trovati nella terza equazione:

$$k_3 + k_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2k_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_3 = 0$$

Abbiamo così ottenuto:

$$\begin{aligned}k_1 &= 0 \\k_2 &= 0 \\k_3 &= 0\end{aligned}$$

Dunque il sistema ammette solo la soluzione nulla, ovvero la terna:

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Poiché gli scalari, soluzione del nostro sistema, sono tutti nulli, ne segue che i tre vettori assegnati sono **linearmente indipendenti**.

Secondo metodo

Sfruttiamo la nozione di rango.

Consideriamo la matrice costituita dai quattro vettori riga assegnati:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il rango di A , sapendo che due o più vettori sono linearmente indipendenti se il rango della matrice ad essi associata è massimo.

Risulta, pertanto:

$$0 < r(A) \leq 3$$

Applichiamo Kronecker e consideriamo il seguente minore di ordine 2 diverso da zero:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \geq 2$$

Calcoliamo adesso l'unico minore orlato di M_1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Dunque, poiché tale minore è diverso da zero risulta $r(A) = 3$, cioè il rango di A è massimo. I vettori sono pertanto **linearmente indipendenti**.

3) Sviluppando il determinante, con la regola di Laplace, rispetto alla prima colonna, risulta:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} \overset{+}{-1} & -2 & 3 & -5 \\ \overset{-}{5} & -2 & 4 & 1 \\ \overset{+}{4} & -2 & 1 & 3 \\ \overset{-}{3} & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot c_{11} + 5 \cdot c_{21} + 4 \cdot c_{31} + 3 \cdot c_{41} = -c_{11} + 5c_{21} + 4c_{31} + 3c_{41} = \\ &= -(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

I precedenti determinanti di ordine tre, a loro volta, possono essere calcolati applicando nuovamente la *regola di Laplace*, sviluppando ciascuno di essi secondo, per esempio, gli elementi della prima riga.

Risulta quindi:

$$\begin{aligned} \det A &= - \left[-2(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] + \\ &\quad -5 \left[-2(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] + \\ &\quad +4 \left[-2(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] + \\ &\quad -3 \left[-2(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right] = \\ &= - \left[-2(-1) - 4(-13) - 5 \right] - 5 \left[-2(-1) - 3(-13) - 5(-5) \right] + 4 \left[-2(7) - 3(-7) - 5(-14) \right] + \\ &\quad -3 \left[-2(11) - 3(-4) - 5(6) \right] = -49 - 330 + 308 + 120 = 49 \end{aligned}$$

Dunque **$\det A = 49$** .

Si può ora osservare che si sarebbe pervenuti allo stesso risultato qualora si fosse utilizzata, per il calcolo dei determinanti del terzo ordine, la *regola di Sarrus*.

Riduciamo ora la matrice data attraverso le operazioni elementari sulle sue righe e sulle sue colonne e determiniamo gli elementi speciali. Si ha:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_4 \rightarrow 2R_4 + 3R_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 11 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 5R_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -17 & 18 \\ 3 & 0 & 11 & -11 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -17 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow 17R_4 + 2R_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -17 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto una matrice ridotta, sempre del quarto ordine:

$$R = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -17 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$$

i cui elementi speciali (elementi non nulli di ogni riga al di sotto dei quali tutti gli altri elementi della matrice sono nulli) sono esattamente:

$$a_{12} = -2; \quad a_{21} = +1; \quad a_{33} = -17$$

4) Iniziamo con l'osservare che la matrice A è quadrata di ordine $m = n = 4$, per cui risulta:

$$0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\} = \min\{4, 4\} = 4$$

Poiché, inoltre, la matrice A non è la matrice nulla segue che $r(A) \neq 0$. Dunque:

$$0 < r(A) \leq 4$$

Primo metodo

Vediamo se $r(A) = 4$, cioè se esiste un minore del quarto ordine estraibile da A non nullo.

Osserviamo che l'unico minore di ordine quattro è proprio $\det A$, motivo per cui occorre calcolare tale determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (\text{sottraendo alla prima colonna la quarta colonna}) \\ &= \begin{vmatrix} \overset{+}{2} & -1 & 2 & 1 \\ \overset{+}{0} & \overset{+}{0} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (\text{sviluppando secondo gli elementi della seconda riga}) \\ &= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Quindi $r(A) \neq 4$. Vediamo se risulta $r(A) = 3$, cioè se esiste un minore di ordine tre estraibile da A diverso da zero. Poiché risulta:

$$A' = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Ne segue che è proprio $r(A) = 3$.

Secondo metodo

Utilizziamo il Teorema degli Orlati o di Kronecker, partendo da un minore del secondo ordine diverso da zero:

$$A' = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \geq 2$$

Esaminiamo adesso gli *orlati* di A' , ovvero i minori del terzo ordine ottenuti propri da A' aggiungendo una riga ed una colonna della matrice A assegnata: se gli orlati sono tutti nulli allora è $r(A) = 2$; se ne esiste, invece, almeno uno non nullo è $r(A) \geq 3$. Poiché risulta:

$$A'' = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 3$$

ovvero esiste un minore del terzo ordine, orlato di A' diverso da zero, passiamo ad esaminare gli *orlati* di A'' . L'unico *orlato* è proprio il $\det A$, che, in virtù di quanto osservato nel *primo metodo*, risulta uguale a zero: l'unico minore del quarto ordine estraibile da A è nullo, cioè risulta $r(A) = 3$.

5) Osserviamo, in primo luogo, che la matrice A ha ordine 3×3 , ovvero è quadrata di ordine 3, la matrice B ha ordine 2×3 e la matrice C ha ordine 2×3 . Ne segue, pertanto, che:

a) $A+B$ è impossibile in quanto A e B non hanno lo stesso ordine

b) $B+C$ è possibile poiché le matrici B e C sono entrambe di ordine 2×3 e risulta:

$$B+C = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & -2-4 \\ 1+0 & -3-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $B' \cdot C$ non è possibile in quanto il numero delle colonne della prima matrice del prodotto, ovvero B , è 3 che è diverso dal numero delle righe della seconda matrice del prodotto, ovvero C , che è pari a 2.

d) $B' \cdot A$ è possibile in quanto il numero delle colonne di B è 3, numero questo che coincide con il numero delle righe di A . Risulta allora:

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+4-6 & 4-4-2 & -3+2+0 \\ 1-6+0 & 4+6+0 & -3-3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

e) $C-B$ è possibile in quanto le matrici sono dello stesso ordine:

$$C-B = \begin{pmatrix} 2-1 & 3-2 & -4-(-2) \\ 0-1 & -1-(-3) & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

f) $3' \cdot A$ è possibile in quanto risulta sempre lecito moltiplicare una qualunque matrice, rettangolare o quadrata che essa sia, per un numero reale; bisogna, cioè, moltiplicare per il numero dato tutti gli elementi della data matrice. Risulta, pertanto:

$$3 \times A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -9 \\ 6 & -6 & 3 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- 6) Trattandosi di un sistema quadrato (il numero delle equazioni è uguale a numero delle incognite), occorre, in primo luogo, verificare se il sistema dato è o meno risolubile secondo Cramer, cioè se è soddisfatta o meno la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer, secondo cui un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema assegnato è diverso da zero. Nel caso specifico, quindi, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{1} & \overset{z}{1} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 -1 +0 -2 -0 -6 = -13 \neq 0 \Rightarrow \Delta = \det A = -13$$

Poiché, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è diverso da zero, ne segue che il sistema dato, secondo il Teorema di Cramer, ammette una ed una sola soluzione ricavabile dalle ben note formule di Cramer. Precisamente risulta:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

avendo indicato con:

Δ il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema, ovvero il $\det A$;

Δ_x il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della x con la colonna dei termini noti;

Δ_y il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della y con la colonna dei termini noti;

Δ_z il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della z con la colonna dei termini noti.

Ma allora segue:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{1} & \overset{z}{1} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_x = \begin{vmatrix} \overset{N}{6} & \overset{y}{1} & \overset{z}{1} \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24 + 5 + 0 + 10 - 0 - 4 = -13 \Rightarrow \Delta_x = -13$$

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{1} & \overset{z}{1} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_y = \begin{vmatrix} \overset{x}{1} & \overset{N}{6} & \overset{z}{1} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 15 + 2 - 5 - 36 = -26 \Rightarrow \Delta_y = -26$$

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{3} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_z = \begin{vmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{1} & \overset{N}{6} \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 2 + 0 - 12 - 0 - 15 = -39 \Rightarrow \Delta_z = -39$$

Quindi si ha:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left(\frac{-13}{-13}, \frac{-26}{-13}, \frac{-39}{-13} \right) = (1, 2, 3)$$

cioè:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

Risolviamo adesso il medesimo sistema con il metodo della matrice inversa e confrontiamo che la soluzione che otterremo è identica a quella precedentemente trovata con il Teorema di Cramer. Poiché, per quanto visto sopra, risulta $\det A = \Delta = -13 \neq 0$, segue che la matrice A ammette l'inversa A^{-1} che occorre ora determinare con uno dei due metodi ben noti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo l'inversa di A utilizzando il metodo della matrice dei complementi algebrici, ovvero la relazione:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

Dobbiamo quindi scrivere, in primo luogo, la matrice dei complementi algebrici A^* . Risulta:

$$\begin{aligned} c_{11} &= + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; & c_{12} &= - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7; & c_{13} &= + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \\ c_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; & c_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3; & c_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \\ c_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3; & c_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2; & c_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & -7 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -7 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -7 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$X = A^{-1}N \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{13} + \frac{4}{13} - \frac{15}{13} \\ \frac{42}{13} - \frac{6}{13} - \frac{10}{13} \\ \frac{12}{13} + \frac{2}{13} + \frac{25}{13} \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione trovata, operando sia con il metodo di Cramer che con quello della matrice inversa, com'è facile constatare, è la medesima.

- 7) Occorre, in primo luogo, verificare se il sistema dato, essendo quadrato (il numero delle equazioni è uguale a numero delle incognite), è o meno risolubile secondo Cramer, cioè se è soddisfatta o meno la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer, secondo cui un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema assegnato è diverso da zero. Nel caso specifico, quindi, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 6 - 0 + 4 - 10 = 0 \Rightarrow \Delta = \det A = 0$$

Poiché, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è uguale a zero, ne segue che il sistema dato non è risolubile utilizzando il Teorema di Cramer, motivo per cui bisogna andare a controllare se esso ammette soluzioni in base al Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa.

Risulta, pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{2} & \overset{z}{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(A) \leq 3 \Rightarrow \det A = \Delta = 0 \Rightarrow r(A) \neq 3$$

Poiché:

$$\begin{vmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

ne segue che è:

$$r(A) = 2$$

in quanto esiste un minore del secondo ordine, estraibile da A, diverso da zero.

Occorre ora controllare il rango della matrice completa, ottenuta dalla matrice A con l'aggiunta della colonna dei termini noti:

$$AN = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{2} & \overset{z}{3} & \overset{N}{10} \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(AN) \leq 3$$

Utilizzando il Teorema degli Orlati, si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r(AN) \geq 2$$

per cui occorre andare a calcolare adesso i suoi minori orlati.

Precisamente:

$$M' = \det A = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad M'' = \begin{vmatrix} x & y & N \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0 + 30 - 20 - 0 + 10 - 20 = 0$$

Poiché entrambi i minori orlati del terzo ordine sono nulli, ne segue proprio che: cioè

$$r(AN) = 2$$

cioè:

$$r(A) = r(AN) = r = 2$$

ovvero è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità di un sistema imposta dal Teorema di Rouché-Capelli. Dunque il sistema dato ammette soluzioni.

Poiché, inoltre, il numero delle incognite del sistema è $n = 3$ (le incognite che figurano nel sistema sono proprio x , y e z) e risulta $n > r$, segue che il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, cioè le soluzioni del sistema dipendono da un unico parametro.

Essendo, poi, il minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

costituito dai coefficienti delle incognite x ed y che figurano nella seconda e nella terza equazione, il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

Inoltre, poiché nel minore non nullo considerato sono stati coinvolti esclusivamente i coefficienti della x e della y , e non quelli della z , bisogna considerare come parametro proprio l'incognita trascurata, cioè la z . Ne segue, quindi, posto $z = t$ parametro reale:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 - 3t \\ x = 5 - 2t \end{cases}$$

che ora, avendo la matrice dei coefficienti diversa da zero, si può risolvere o con uno dei metodi classici, oppure con le regole di Cramer. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 - 3t & 2 \\ 5 - 2t & 0 \end{vmatrix} = 0 - 10 + 4t = 4t - 10 \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = 4t - 10$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 - 3t \\ 1 & 5 - 2t \end{vmatrix} = 5 - 2t - 10 + 3t = t - 5 \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = t - 5$$

da cui si ricava:

$$(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) = \left(\frac{4t - 10}{-2}, \frac{t - 5}{-2} \right) = \left(-2t + 5, -\frac{1}{2}t + \frac{5}{2} \right)$$

soluzione del sistema equivalente a quello assegnato.

Dunque la soluzione del sistema dato sarà:

$$(x, y, z) = \left(-2t + 5, -\frac{1}{2}t + \frac{5}{2} \right)$$

con t parametro reale ($t \in \mathbb{R}$).

- 8) Occorre, in primo luogo, osservare che il sistema dato è rettangolare (il numero delle equazioni è diverso dal numero delle incognite): è, infatti, un sistema di ordine 3×4 (3 equazioni e 4 incognite). Bisogna allora andare a controllare se esso ammette soluzioni in base al Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa. Risulta, pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} & \overset{w}{3} \\ 5 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(A) \leq 3$$

Utilizzando il Teorema degli Orlati, si ha:

$$\begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$$

per cui occorre andare a calcolare adesso i suoi minori orlati.

Precisamente:

$$M' = \begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 10 + 4 + 8 - 0 = 0; \quad M'' = \begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{w}{3} \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 30 - 12 - 20 + 5 = 0$$

Poiché tutti i minori orlati del terzo ordine sono uguali a zero, segue:

$$r(A) \neq 3 \Rightarrow r(A) = 2$$

Consideriamo adesso la matrice completa ottenuta da A aggiungendo ad essa la colonna dei termini noti:

$$AN = \begin{pmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} & \overset{w}{3} & \overset{N}{2} \\ 5 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(AN) \leq 3$$

Occorre determinare ora il rango di AN . Sempre per il Teorema degli Orlati si può partire da un minore del secondo ordine diverso da zero estraibile dalla matrice AN .

Sia esso:

$$\begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3 \neq 0 \Rightarrow r(AN) \geq 2$$

Due orlati di tali minori sono stati già calcolati in precedenza quando si è determinato il rango della matrice incompleta, precisamente:

$$M' = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 10 + 4 + 8 - 0 = 0; \quad M'' = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{w} \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 30 - 12 - 20 + 5 = 0$$

Resta allora da calcolare l'ultimo minore orlato ottenuto aggiungendo la quarta colonna e la terza riga:

$$M''' = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{N} \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 1 + 20 - 8 - 4 + 15 = 0$$

Poiché anche in questo caso tutti i minori orlati del terzo ordine sono uguali a zero, si può affermare che è:

$$r(AN) = 2$$

Dunque:

$$r(A) = r(AN) = r = 2$$

ovvero è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità di un sistema imposta dal Teorema di Rouché-Capelli. Ne segue che il sistema dato ammette soluzioni.

Poiché, inoltre, il numero delle incognite del sistema è $n = 4$ (le incognite che figurano nel sistema sono proprio x , y , z e w) e risulta $n > r$, segue che il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, cioè le soluzioni del sistema dipendono da due parametri.

Poiché il minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3 \neq 0$$

è costituito dai coefficienti delle incognite x ed y che figurano nella prima e nella seconda equazione, il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3w = 2 \\ 5x + 4y - 2z + 5w = 1 \end{cases}$$

Inoltre, poiché nel minore non nullo considerato sono stati coinvolti esclusivamente i coefficienti della x e della y , non quelli della z e della w , bisogna considerare come parametri proprio le incognite trascurate, cioè la z e la w . Ne segue, quindi, posto $z = h$ e $w = k$ parametri reali:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 + h - 3k \\ 5x + 4y = 1 + 2h - 5k \end{cases}$$

che ora, avendo la matrice dei coefficienti diversa da zero, si può risolvere o con uno dei metodi classici, oppure con le regole di Cramer. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 + h - 3k & 1 \\ 1 + 2h - 5k & 4 \end{vmatrix} = 8 + 4h - 12k - 1 - 2h + 5k = 2h - 7k + 7 \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = 2h - 7k + 7$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2+h-3k \\ 5 & 1+2h-5k \end{vmatrix} = 2 + 4h - 10k - 10 - 5h + 15k = -h + 5k - 8 \Rightarrow \Delta_y = -h + 5k - 8$$

da cui si ricava:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) = \left(\frac{2h-7k+7}{3}, \frac{-h+5k-8}{3} \right)$$

soluzione del sistema equivalente a quello assegnato.

Dunque la soluzione del sistema dato sarà:

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{2h-7k+7}{3}, \frac{-h+5k-8}{2}, h, k \right)$$

con h e k parametri reali ($h, k \in \mathbb{R}$).

9)

CAMPO DI ESISTENZA

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione data, come del resto tutte le funzioni polinomiali, è definita su tutta la retta reale, motivo per cui non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Poiché si è in presenza di un polinomio di terzo grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di due polinomi, uno di primo grado ed uno di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, ovvero 2, sono esattamente ± 1 , ± 2 , essendo 2 un numero primo. Ma allora si ha:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$$

da cui, procedendo per tentativi, risulta:

$$P(x=+1) = 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 - 7 + 2 = 0$$

cioè per $x = +1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & 2 & -7 & +2 \\ +1 & & 3 & 5 & -2 \\ \hline & 3 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x-1)(3x^2 + 5x - 2)$$

Inoltre è possibile scomporre il polinomio di secondo grado:

$$Q(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

utilizzando la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-5-7}{6} = -2 \text{ ed } x_2 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}$$

Quindi risulta:

$$Q(x) = 3x^2 + 5x - 2 = (x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

da cui:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x-1)(3x^2 + 5x - 2) = (x-1)(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Scomposto il polinomio di terzo grado, risulta ora possibile determinare le intersezioni della funzione data con gli assi cartesiani:

sostituendo, in y, al posto della x il valore 0

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 2) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y}$$

sostituendo, in y, al posto della y il valore 0

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x-1 = 0 \\ x+2 = 0 \\ x - \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

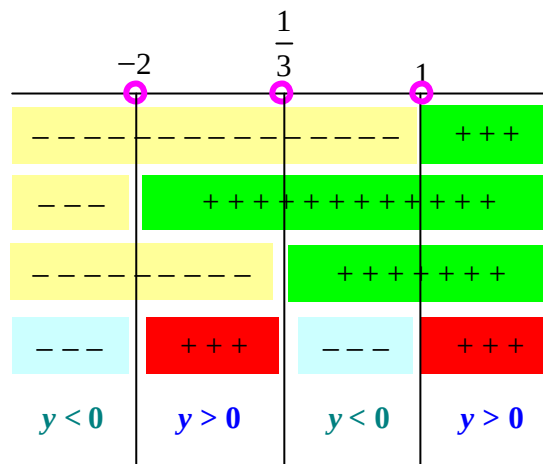
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow B = (1, 0); C = (-2, 0); D = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x}$$

SEGNO DELLA FUNZIONE

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ x - \frac{1}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -2 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Dunque si ha:

$$y > 0 \text{ per } -2 < x < \frac{1}{3}, x > 1$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 + 2x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

Risulta:

$$D(3x^3 + 2x^2 - 7x + 2) = 9x^2 + 4x - 7$$

da cui segue:

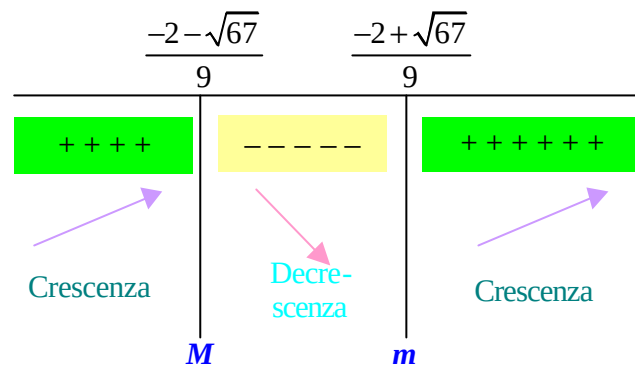
$$y' > 0 \Rightarrow 9x^2 + 4x - 7 > 0$$

Troviamo, in primo luogo, le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione utilizzando la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 63}}{9} = \frac{-2 \pm \sqrt{67}}{9} \Rightarrow x_1 = \frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \cong -1,13 \text{ ed } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \cong 0,68$$

da cui:

$$9x^2 + 4x - 7 > 0 \Rightarrow x < \frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \text{ ed } x > \frac{-2 + \sqrt{67}}{9}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{-2 - \sqrt{67}}{9}$ ed un minimo in $x = \frac{-2 + \sqrt{67}}{9}$.

In particolare:

$$x = \frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \Rightarrow y = 3 \left(\frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \right)^3 + 2 \left(\frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \right)^2 - 7 \left(\frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \right) + 2 \cong 8,13$$

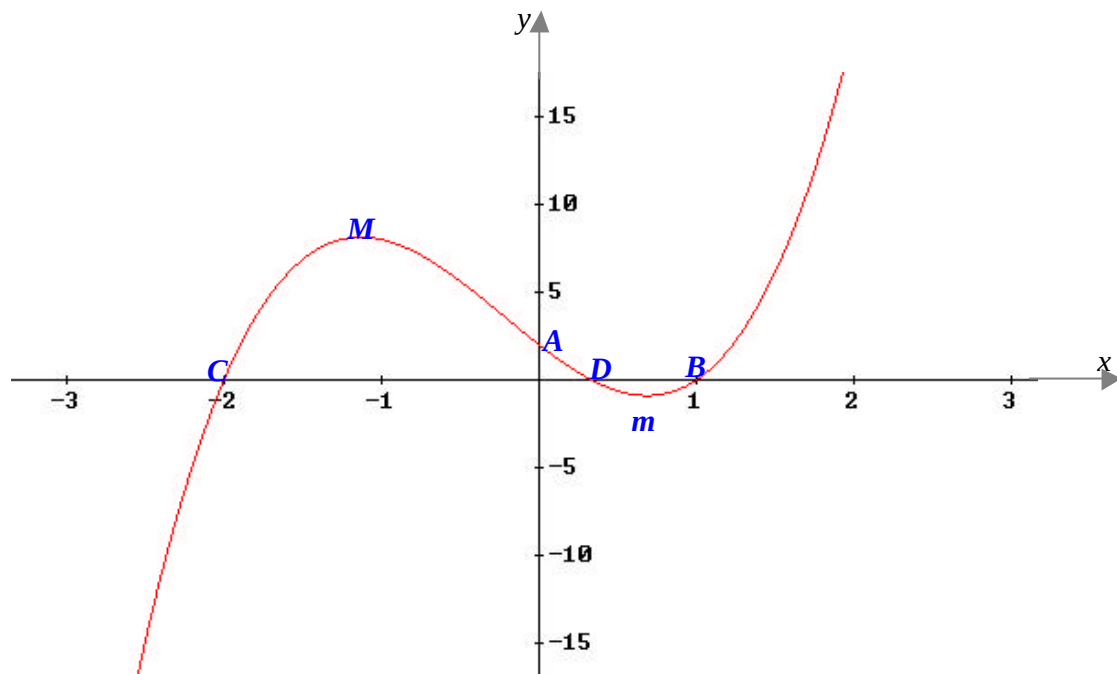
$$x = \frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \Rightarrow y = 3 \left(\frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \right)^3 + 2 \left(\frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \right)^2 - 7 \left(\frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \right) + 2 \cong -0,89$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,68; -0,89)$ è il punto di *minimo*

$M(-1,13; 8,13)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO



10)

CAMPO DI ESISTENZA

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

Essendo, però, $3x^2 + 2$ la somma di due quadrati, precisamente $(\sqrt{3}x)^2 = 3x^2$ e $(\sqrt{2})^2 = 2$, segue che esso è sempre diverso da zero.

La funzione data, pertanto, non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Risulta:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} = -1,5 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\frac{3}{2}\right) \text{ è il punto di intersezione} \\ &\hspace{15em} \text{della funzione con l'asse } y \\ \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

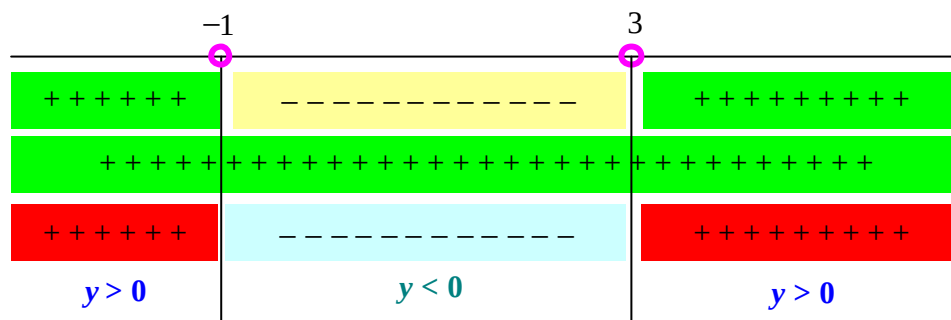
$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x_1 = 1-2 = -1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y=0 \\ x_2 = 1+2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow B = (-1, 0)$ e $C = (3, 0)$ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 3x^2 + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1, x > 3 \\ \text{sempre (somma di due quadrati)} \end{cases}$$



Dunque:

$$y > 0 \quad \text{per} \quad -1 < x, x > 3$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{3x^2} \right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{1}{3}$$

cioè la retta di equazione $y = \frac{1}{3}$ è un asintoto orizzontale per la funzione:

$$A.O.: y = \frac{1}{3}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

Risulta:

$$D \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \right) = \frac{(2x - 2) \cdot (3x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 3) \cdot (6x)}{(3x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 + 4x - 6x^2 - 4 - 6x^3 + 12x^2 + 18x}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{6x^2 + 22x - 4}{(3x^2 + 2)^2}$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{6x^2 + 22x - 4}{(3x^2 + 2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 22x - 4 > 0 \\ (3x^2 + 2)^2 > 0 \end{cases}$$

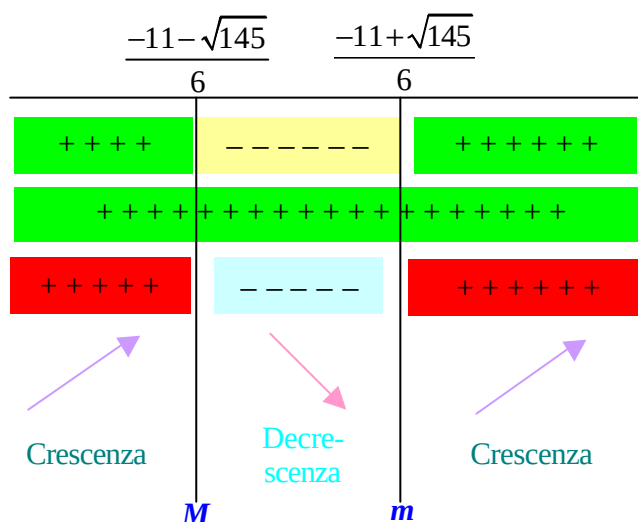
Poiché risulta:

$$6x^2 + 22x - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 11x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 24}}{6} = \frac{-11 \pm \sqrt{145}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-11 - \sqrt{145}}{6} \cong -3,84 \text{ ed } x_2 = \frac{-11 + \sqrt{145}}{6} \cong 0,17$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 22x - 4 > 0 \\ (3x^2 + 2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{-11 - \sqrt{145}}{6}, \quad x > \frac{-11 + \sqrt{145}}{6} \\ \text{sempre (è un quadrato)} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{-11 - \sqrt{145}}{6}$ ed un minimo in $x = \frac{-11 + \sqrt{145}}{6}$.

In particolare si ha:

$$x = \frac{-11 - \sqrt{145}}{6} \Rightarrow y = \frac{\left(\frac{-11 - \sqrt{145}}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{-11 - \sqrt{145}}{6}\right) - 3}{3\left(\frac{-11 - \sqrt{145}}{6}\right)^2 + 2} \cong 0,42$$

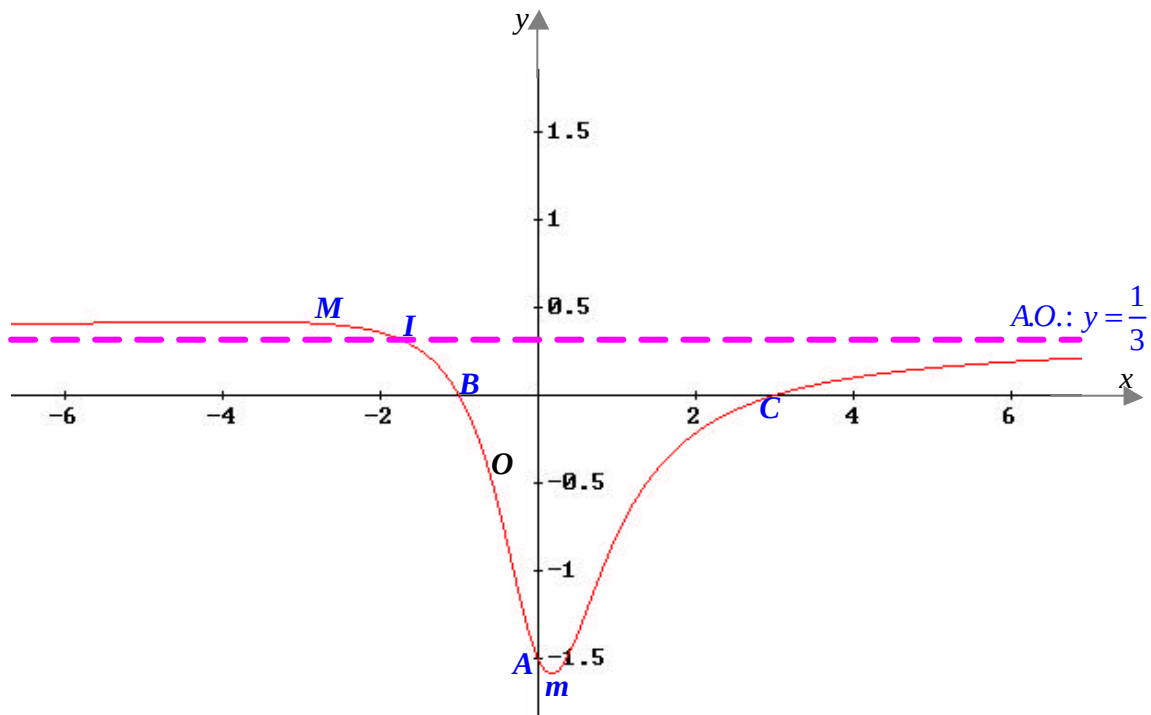
$$x = \frac{-11 + \sqrt{145}}{6} \Rightarrow y = \frac{\left(\frac{-11 + \sqrt{145}}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{-11 + \sqrt{145}}{6}\right) - 3}{3\left(\frac{-11 + \sqrt{145}}{6}\right)^2 + 2} \cong -1,58$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,17;-1,58)$ è il punto di *minimo*

$M(-3,84;0,42)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO



Osservazione

La funzione interseca l'asintoto orizzontale. Possiamo calcolare il punto di intersezione tra la funzione assegnata e la retta $y = 3$ risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(essendo uguali i primi membri delle due} \\ \text{equazioni del sistema dovranno necessariamente} \\ \text{essere uguali anche i secondi membri)} \end{array}$$
$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \frac{3(x^2 - 2x - 3) - (3x^2 + 2)}{3x^2 + 2} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 6x - 9 - 3x^2 - 2}{3x^2 + 2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -6x - 11 = 0 \Rightarrow 6x + 11 = 0 \Rightarrow x = -\frac{11}{6} \cong -1,83$$

Dunque il punto di intersezione sarà $I = \left(-\frac{11}{6}, \frac{1}{3}\right)$.

10)

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione esponenziale, il cui esponente è una frazione, il suo campo di esistenza è rappresentato da tutto l'asse reale esclusi i punti in cui il denominatore della frazione si annulla, cioè:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -2, -2 < x < +\infty\}$$

Ne segue subito che la retta $x = -2$ è un asintoto verticale per la funzione assegnata:

$$AV.: x = -2$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x^2 - x}{x+2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{0-0}{0+2}} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 1) \quad \text{è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x^2 - x}{x+2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{x^2 - x}{x+2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{mai} \end{cases} \quad \text{non ci sono intersezioni con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2 - x}{x+2}} > 0 \Rightarrow \text{sempre (la funzione esponenziale è sempre positiva), cioè:}$$

+++++

$$y > 0$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x}{x+2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-x}{x+2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

cioè la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale sinistro per la funzione:

$$\text{A.Q.S.: } y = 0$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$\begin{aligned} D \left(e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \right) &= e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \cdot D \left(\frac{x^2-x}{x+2} \right) = e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \cdot \left(\frac{(2x-1)(x+2) - (x^2-x) \cdot 1}{(x+2)^2} \right) = \\ &= e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \cdot \left(\frac{2x^2 + 4x - x - 2 - x^2 + x}{(x+2)^2} \right) = e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \cdot \frac{x^2 + 4x - 2}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

da cui:

$$y' > 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \cdot \frac{x^2 + 4x - 2}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x^2-x}{x+2}} > 0 \\ \frac{x^2 + 4x - 2}{(x+2)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x^2-x}{x+2}} > 0 \\ x^2 + 4x - 2 > 0 \\ (x+2)^2 > 0 \end{cases}$$

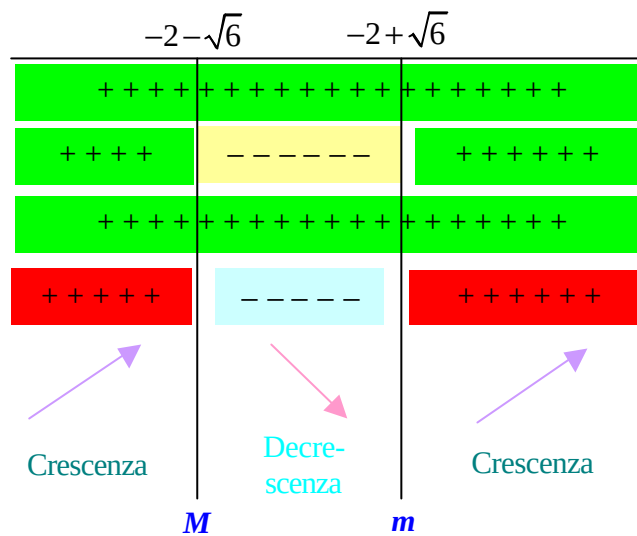
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ x^2 + 4x - 2 > 0 \\ \text{sempre (in quanto è un quadrato)} \end{cases}$$

Troviamo, pertanto, le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione che figura nel sistema. Poiché risulta:

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2}}{1} = -2 \pm \sqrt{6} \Rightarrow x_1 = -2 - \sqrt{6} \cong -4,44, x_2 = -2 + \sqrt{6} \cong 0,44$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ x^2 + 4x - 2 > 0 \\ \text{sempre (in quanto è un quadrato)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ x < -2 - \sqrt{6}, x > -2 + \sqrt{6} \\ \text{sempre} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = -2 - \sqrt{6}$ ed un minimo in $x = -2 + \sqrt{6}$.
In particolare si ha:

$$x = -2 - \sqrt{6} \Rightarrow y = e^{\frac{(-2-\sqrt{6})^2 - (-2-\sqrt{6})}{(-2-\sqrt{6})+2}} \cong 0,000005$$

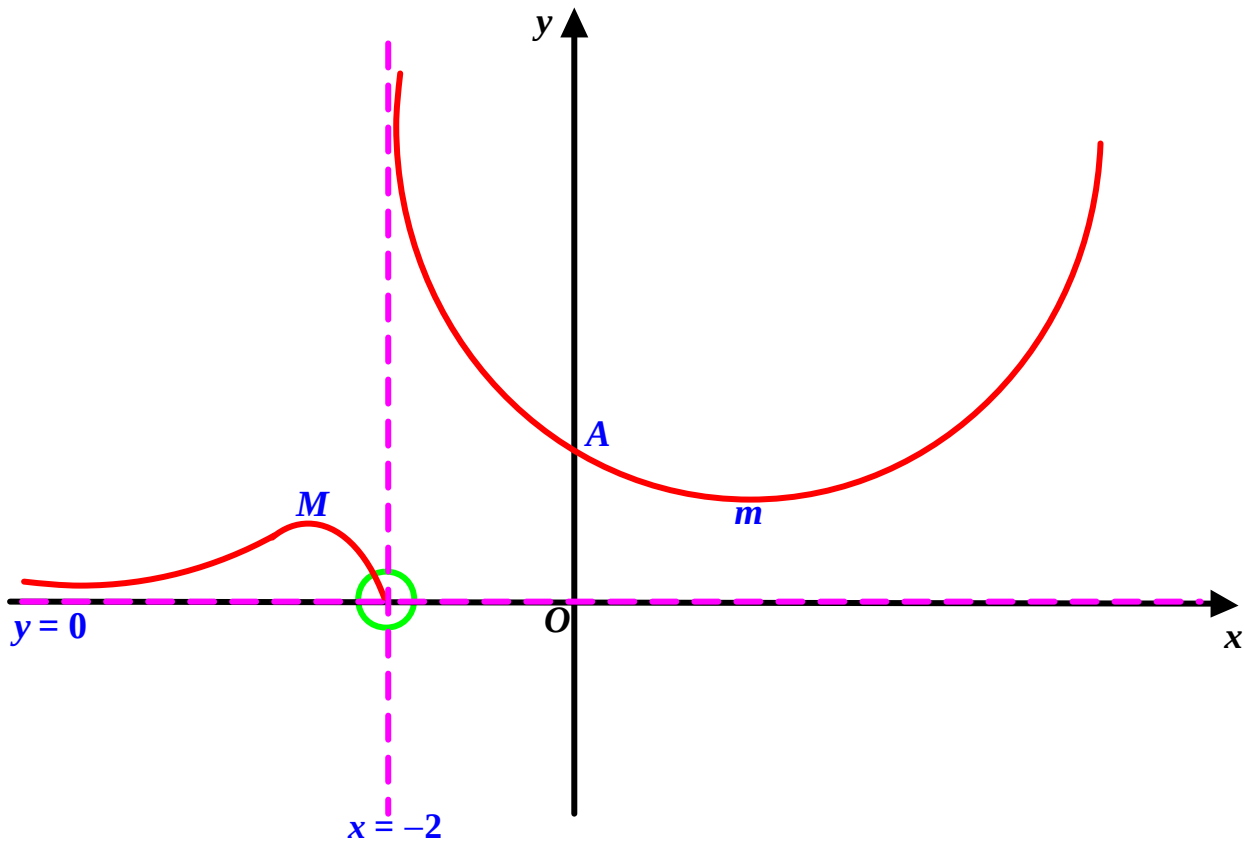
$$x = -2 + \sqrt{6} \Rightarrow y = e^{\frac{(-2+\sqrt{6})^2 - (-2+\sqrt{6})}{(-2+\sqrt{6})+2}} \cong 0,90$$

Ne segue, quindi, che:

$m(-4,44;0,000005)$ è il punto di *Massimo*

$M(0,44;0,90)$ è il punto di *Mminimo*

IL GRAFICO.



11)

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione data è una irrazionale con indice di radice dispari, il suo insieme di definizione coincide esattamente con il campo di esistenza del radicando, che nel caso specifico è un polinomio definito su tutta la retta reale, cioè:

$$C.E. = \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione irrazionale, dunque, non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani si ottengono resolvendo, come di consueto, i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{x^3 - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt[3]{1} = -1 \end{cases} \Rightarrow A = (0, -1) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} y=0 \\ 0=\sqrt[3]{x^3-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt[3]{x^3-1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^3-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x-1)(x^2+x+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x-1=0 \text{ oppure } x^2+x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \text{ oppure mai } (\Delta < 0) \end{cases} \Rightarrow B=(1,0)
\end{aligned}$$

è il punto di intersezione della
funzione con l'asse x

Si osservi che x^3-1 può essere scomposto o utilizzando la formula della differenza di due cubi oppure con la regola di Ruffini; inoltre, trattandosi di una radice cubica, è sempre possibile portare il segno negativo fuori del simbolo di radice.

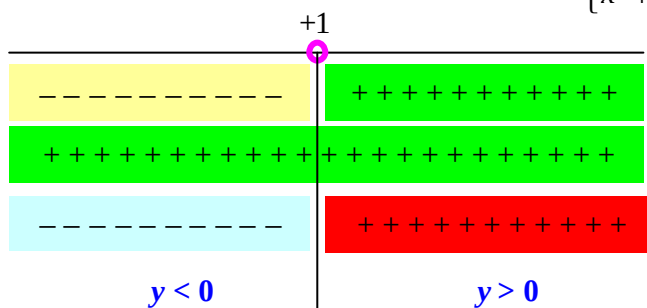
SEGNO DELLA FUNZIONE.

Anche in questo caso, per lo studio del segno, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Ne segue:

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3-1} > 0 \Rightarrow x^3-1 > 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2+x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{sempre } (\Delta < 0) \end{cases}$$



cioè:

$$y > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Si osservi che il segno di tutte le funzioni irrazionali con indice di radice dispari coincide con il segno del radicando.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Per il calcolo dei limiti di questa classe di funzioni, sarà sufficiente, come per quelle con indice di radice pari, determinare il limite del radicando, tenendo, però, sempre bene a mente la seguente regola generale:

Se $y = \sqrt[3]{f(x)}$, dove $f(x)$ è una qualunque funzione assegnata, allora risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)]}$$

Nell'esempio quindi si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3-1}) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3-1)} = \sqrt[3]{\pm\infty} = \pm\infty$$

Ne segue che, per

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$$

Dunque la funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Ricordando che:

$$D\left(\sqrt[3]{f(x)}\right) = D\left[f(x)\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \left[f(x)\right]^{\frac{1}{3}-1} \cdot D\left[f(x)\right] = \frac{1}{3} \cdot \left[f(x)\right]^{-\frac{2}{3}} \cdot D\left[f(x)\right] = \frac{D\left[f(x)\right]}{3\sqrt[3]{\left[f(x)\right]^2}}$$

si ottiene:

$$D\left(\sqrt[3]{x^3-1}\right) = \frac{D\left(x^3-1\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} \cdot \frac{3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}$$

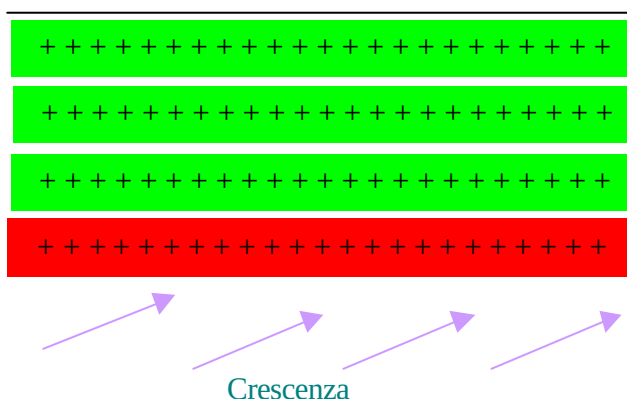
Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

cioè:

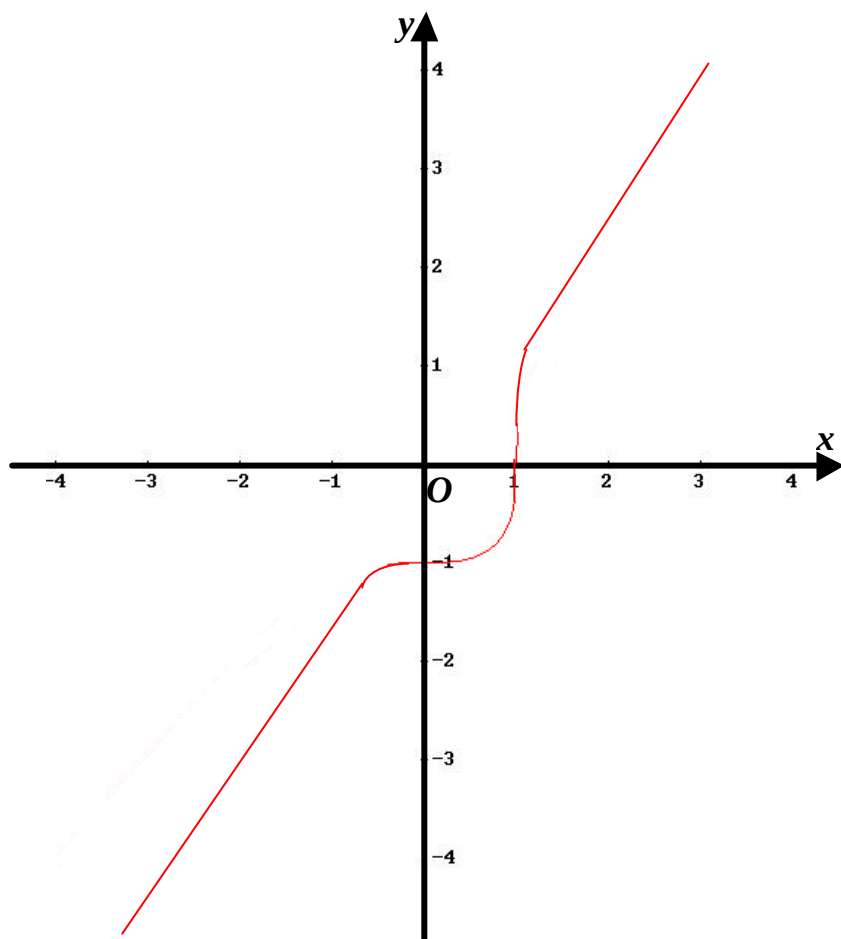
$$\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} \cdot \frac{3x^2}{\left(x^3-1\right)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} > 0 \\ \frac{3x^2}{\left(x^3-1\right)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2} > 0 \\ 3x^2 > 0 \\ \left(x^3-1\right)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ (il radicando è un quadrato e quindi sempre positivo)} \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Dunque la funzione è sempre crescente e non ammette quindi né massimi né minimi.

IL GRAFICO.



12)

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione data è una irrazionale, con indice di radice pari, ed il suo radicando è un polinomio, cioè definito su tutta la retta reale, essa risulta definita solo per i valori della x per i quali il radicando è positivo, ovvero maggiore od uguale a zero, cioè:

$$-2x^2 - 7x + 3 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 7x - 3 \leq 0$$

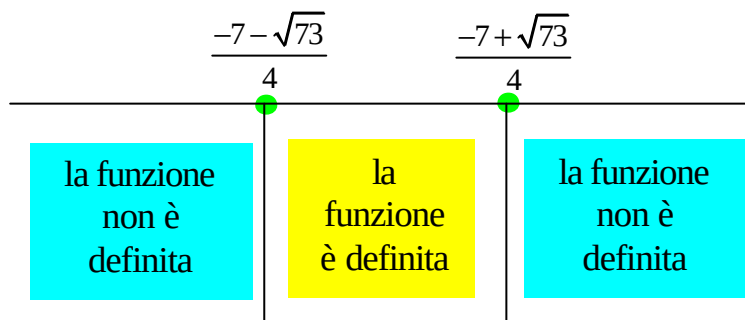
Poiché, però, si ha:

$$2x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 24}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{4}$$

risulta:

$$2x^2 + 7x - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{-7 - \sqrt{73}}{4} \cong -3,88 < x < \frac{-7 + \sqrt{73}}{4} \cong 0,38$$

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-7 - \sqrt{73}}{4} < x < \frac{-7 + \sqrt{73}}{4} \right\}$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani si ottengono risolvendo, come di consueto, i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{-2x^2 - 7x + 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3} \cong 1,73 \end{cases} \Rightarrow A = (0, \sqrt{3}) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt{-2x^2 - 7x + 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{-2x^2 - 7x + 3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{-7 - \sqrt{73}}{4}, 0 \right), C = \left(\frac{-7 + \sqrt{73}}{4}, 0 \right) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

Si osservi che, qualora si voglia eguagliare a zero un radicale, è sufficiente eguagliare a zero il suo radicando.

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Anche in presenza di funzioni irrazionali, per lo studio del segno, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Ne segue:

$$y > 0 \Rightarrow y = \sqrt{-2x^2 - 7x + 3} \Rightarrow -2x^2 - 7x + 3 > 0 \text{ sempre nel campo di esistenza}$$

Si osservi che tutte le funzioni irrazionali con indice di radice pari, sono sempre positive all'interno del campo di esistenza: per studiare la loro positività, infatti, bisognerebbe studiare la positività del radicando, cosa che già si fa nel determinare il campo di definizione della funzione stessa.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Per il calcolo dei limiti delle funzioni irrazionali, sarà sufficiente determinare il limite del radicando, tenendo bene a mente, però, che, in generale, vale la seguente proprietà:

Se $y = \sqrt{f(x)}$, dove $f(x)$ è una qualunque funzione assegnata, allora risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)]}$$

Osserviamo, però, che nell'esercizio proposto la funzione non è definita né per x che tende a $-\infty$ né per x che tende a $+\infty$, per cui risulta:

La funzione non ha asintoti orizzontali!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Ricordando che:

$$D(\sqrt{f(x)}) = D[f(x)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^{\frac{1}{2}-1} \cdot D[f(x)] = \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot D[f(x)] = \frac{D[f(x)]}{2\sqrt{f(x)}}$$

si ottiene:

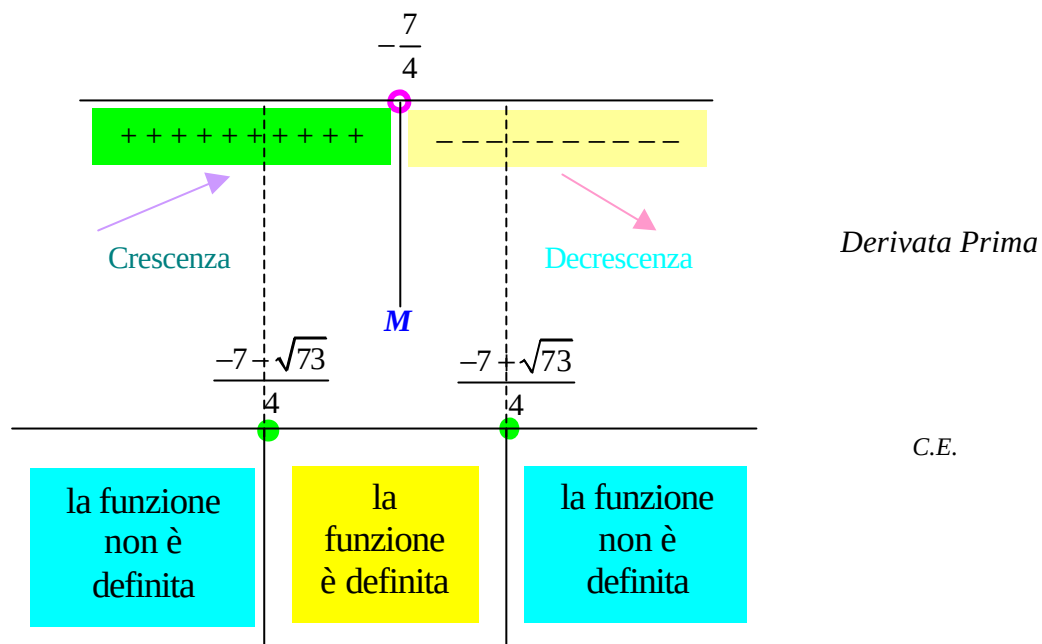
$$D(\sqrt{-2x^2 - 7x + 3}) = \frac{D(-2x^2 - 7x + 3)}{2\sqrt{-2x^2 - 7x + 3}} = \frac{-4x - 7}{2\sqrt{-2x^2 - 7x + 3}}$$

Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

cioè:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{-4x - 7}{2\sqrt{-2x^2 - 7x + 3}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -4x - 7 > 0 \\ \sqrt{-2x^2 - 7x + 3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 7 < 0 \\ \text{sempre nel C.E.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{7}{4} = -1,75 \\ \text{sempre nel C.E.} \end{cases}$$



Dunque la funzione data ammette un massimo in $x = -\frac{7}{4}$ la cui esistenza è garantita dal campo di definizione della funzione.

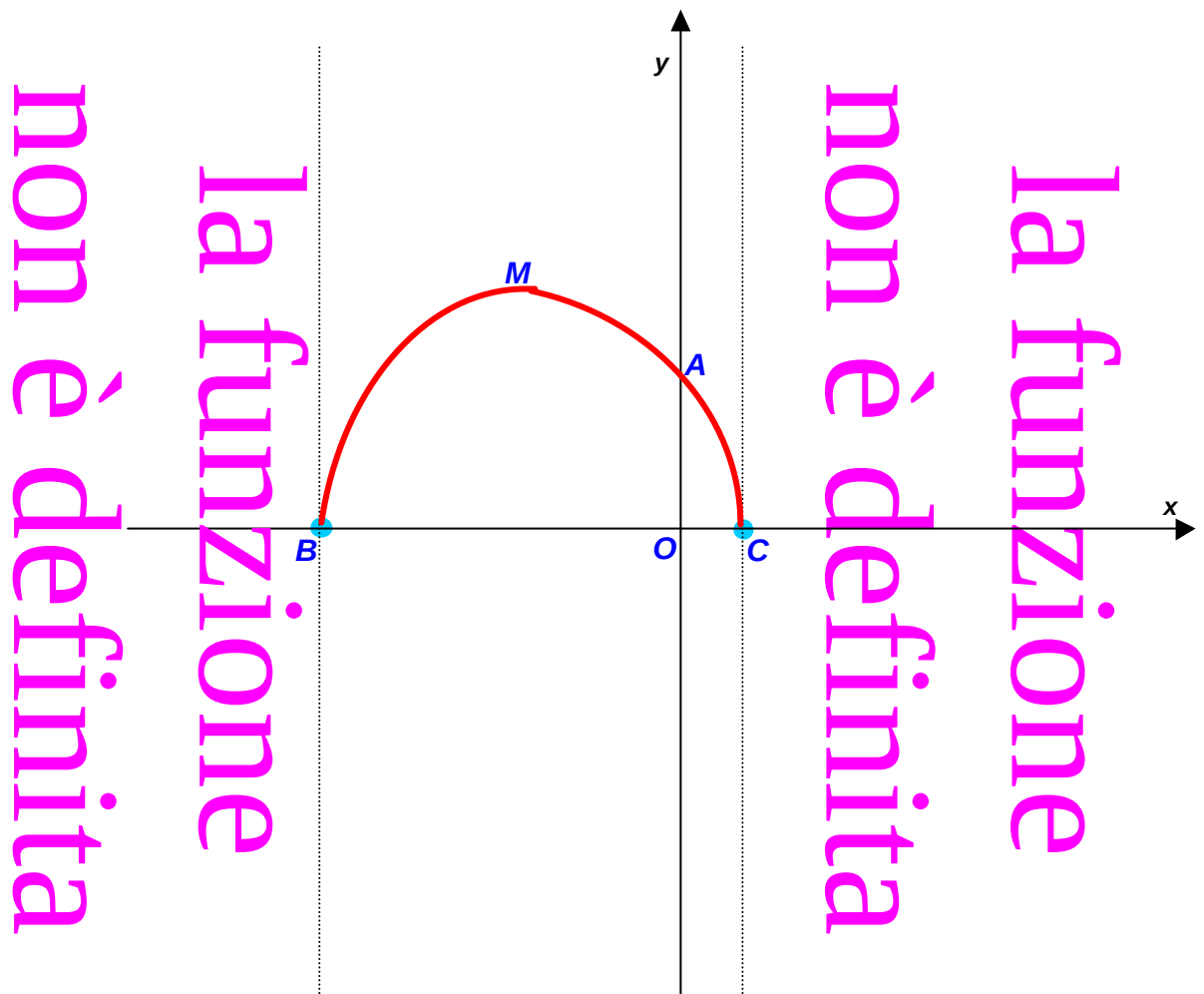
In particolare si ha:

$$x = -\frac{7}{4} \Rightarrow y = \sqrt{-2\left(-\frac{7}{4}\right)^2 - 7\left(-\frac{7}{4}\right) + 3} \approx 3,02$$

Ne segue, quindi, che:

$M(-1,75; 3,02)$ è il punto di Massimo

IL GRAFICO.



14)

CAMPO DI ESISTENZA.

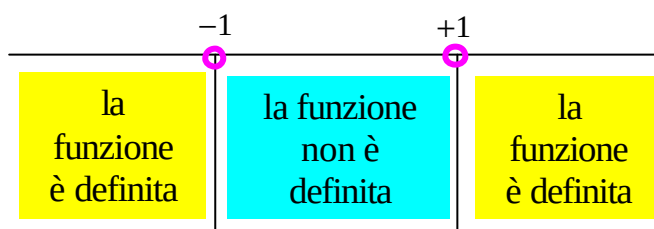
Poiché la funzione data è logaritmica ed il suo argomento è una frazione, occorre considerare contemporaneamente il campo di definizione sia della funzione logaritmica (argomento positivo) che della funzione razionale fratta (denominatore diverso da zero):

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} > 0 \text{ (per illogaritmo)} \\ x^2-1 \neq 0 \text{ (per la frazione)} \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} (x-1)^2 > 0 \\ x^2-1 > 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{sempre (è un quadrato)} \\ x < -1, x > +1 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \right\}$$

Ne segue subito che le rette di equazione $x = \pm 1$ sono due asintoti verticali per la funzione assegnata:

AV.: $x = \pm 1$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Per determinare l'intersezione della funzione con gli assi cartesiani occorre risolvere, come di consueto, i due sistemi, osservando, però, che nel caso in esame in $x = 0$ la funzione non è definita, motivo per cui essa non presenta intersezioni con l'asse y:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \ln \left[\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \ln \left[\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\ln \left[\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right]} = e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\ln \left[\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right]} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{(x-1)^2}{x^2-1} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 1}{x^2-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{-2x+2}{x^2-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2x+2 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (1, 0) \end{aligned}$$

è il punto di intersezione della
funzione con l'asse x

Osserviamo, però, che il punto A non appartiene all'insieme di definizione della funzione che, pertanto, non interseca gli assi cartesiani.

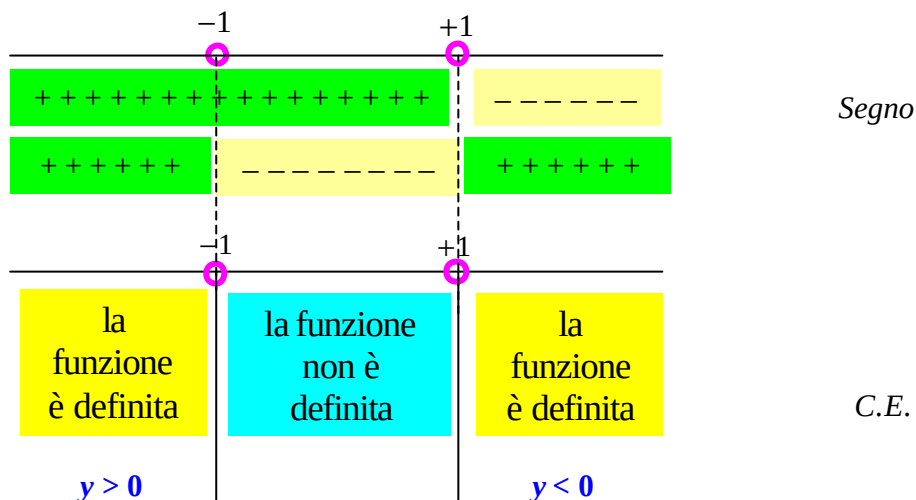
SEGNO DELLA FUNZIONE.

Anche in questo caso, per lo studio del segno della funzione, occorre risolvere la disequazione:
 $y > 0$

Quindi:

$$\begin{aligned} y > 0 &\Rightarrow \ln \left[\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right] > 0 \Rightarrow e^{\ln \left[\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right]} > e^0 = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2-1} > 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2-1} - 1 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{-2x+2}{x^2-1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x+2 > 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 < 0 \\ x < -1, x > +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < -1, x > +1 \end{cases} \end{aligned}$$

Risulta, pertanto:



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left[\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right] \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right) \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \right) \right] = \ln(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left[\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right] \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right) \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \right) \right] = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Ne segue che:

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

cioè la retta di equazione $y = 0$, ovvero l'asse x , è un *Asintoto Orizzontale* sia *destro* che *sinistro* della funzione.

$$A.O.: y = 0$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ha:

$$D \left\{ \ln \left[\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right] \right\} = \frac{1}{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}} \cdot D \left[\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \right] = \frac{x^2-1}{(x-1)^2} \cdot \left[\frac{(2x-2)(x^2-1) - (x^2-2x+1)2x}{(x^2-1)^2} \right] =$$

$$= \frac{x^2-1}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3+4x-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{-2x^2+2}{(x^2-1)} = \frac{-2x^2+2}{(x-1)^2(x^2-1)} = \frac{-2(x^2-1)}{(x-1)^2(x^2-1)} =$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}$$

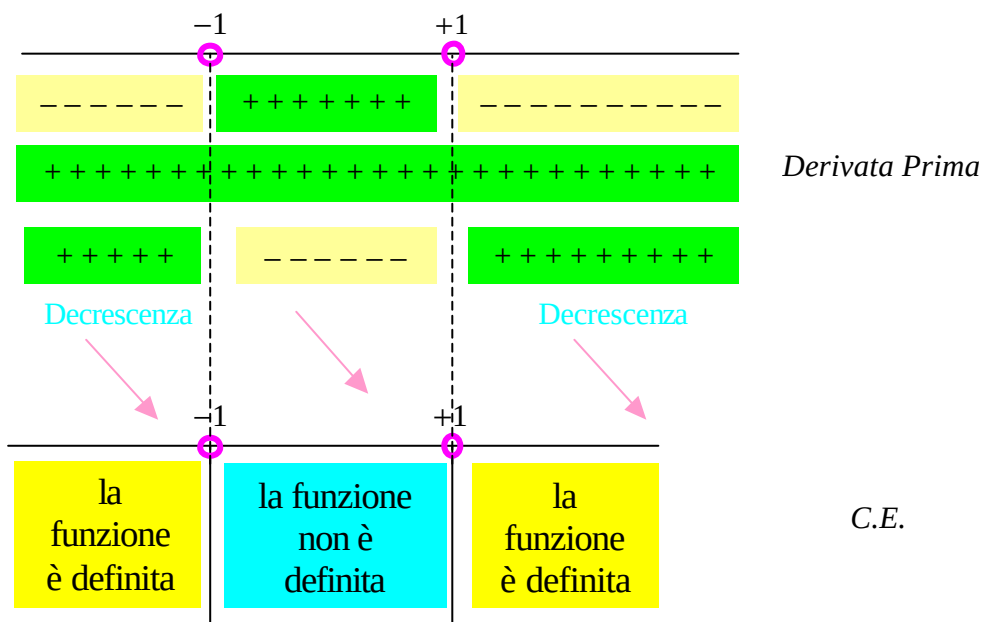
Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

cioè:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{-2}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow \text{mai} \Rightarrow y' < 0 \text{ sempre}$$

da cui segue:



Dunque la funzione è sempre decrescente.

IL GRAFICO.

